Fortsetzungen von Manisbewertungen

Gräter, Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982,
S.147-150

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Fortsetzungen von Manisbewertungen

Von **Joachim Gräter**, Braunschweig

Einleitung

Als Verallgemeinerung der Krullbewertungen definiert M. Manis in [2], [3] Bewertungen auf kommutativen Ringen mit Eins. Es stellt sich heraus, daß im allgemeinen eine Bewertung v eines Ringes R nicht auf jeden Oberring S fortsetzbar ist. Manis zeigt in [3], daß sich v genau dann auf S fortsetzen läßt, wenn $S \cdot v^{-1}(0) \cap R = v^{-1}(0)$ gilt. Ist w eine Fortsetzung von v auf S, so ist $w^{-1}(0)$ ein Primideal von S mit $w^{-1}(0) \cap R = v^{-1}(0)$. Ziel dieser Arbeit ist es zu beweisen, daß es zu jedem Primideal P von S mit $P \cap R = v^{-1}(0)$ eine Fortsetzung w von v auf S mit $w^{-1}(0) = P$ gibt. Außerdem wird gezeigt, daß in dem Fall, in dem v auf S nicht fortsetzbar ist, sich zumindest eine Bewertung w von S konstruieren läßt, die mit v auf $R \setminus v^{-1}(0)$ übereinstimmt.

Der Fortsetzungssatz für Manisbewertungen

Im Verlaufe dieser Arbeit sollen R und S Bezeichnungen für Ringe sein, wobei ein Ring stets ein kommutativer Ring mit Eins ist. Die Eins eines Teilringes soll immer mit der Eins des Ringes übereinstimmen.

Ist Γ eine multiplikativ geschriebene geordnete Gruppe und $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \{0\}$, dann heißt eine surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} v\colon R &\longrightarrow \hat{\Gamma} \\ x &\longmapsto v(x) \end{aligned}$$

eine (Manis-)Bewertung von R, wenn für alle $x,y \in R$ gilt

(B1) $v(xy) = v(x)v(y)$.
(B2) $v(x+y) \leqq \max\{v(x),v(y)\}$.

Γ heißt die zu v gehörende Wertegruppe. Die Anzahl der echten konvexen Untergruppen von Γ bezeichnen wir mit Rang v. Ist R ein Körper, so ist v eine Krullbewertung (siehe [1]).

Abkürzend führen wir für eine Bewertung v von R folgende Bezeichnungen ein: $N_v = \{x \mid x \in R \wedge v(x) = 0\}$, $P_v = \{x \mid x \in R \wedge v(x) < 1\}$, $B_v = \{x \mid x \in R \wedge v(x) \leqq 1\}$ und $\hat{\Gamma}_v = \{v(x) \mid x \in R\}$. Manis zeigt in [3]

(1) Ist A ein Teilring von R und P ein Primideal von A, so gibt es eine Bewertung v von R mit $A \subseteq B_v$ und $P_v \cap A = P$.
(2) Ist A ein Teilring von R und P ein Primideal von A, so gibt es genau dann eine Bewertung v von R mit $B_v = A$ und $P_v = P$, wenn es zu jedem $x \in R \setminus A$ ein $y \in P$ mit $xy \in A \setminus P$ gibt.

(3) Ist v eine Bewertung von R, P ein Primideal von B_v mit $N_v \subseteq P \subseteq P_v$, sowie $B = \{x | x \in R \wedge xP \subseteq P\}$ und $\sum = \{v(x) | x \in B \setminus P\}$, dann ist $\sum$ eine konvexe Untergruppe von Γ_v und

$$w: B \longrightarrow \hat{\sum}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} v(x) & \text{falls } x \in B\setminus P \\ 0 & \phantom{\text{falls }} x \in P \end{cases}$$

eine Bewertung von B.

Ist v eine Bewertung von R, S eine Erweiterung von R und w eine Bewertung von S, so heißt w eine Fortsetzung von v auf S, wenn es einen isotonen Monomorphismus $\Phi: \hat{\Gamma}_v \longrightarrow \hat{\Gamma}_w$ gibt, so daß für alle $x \in R$ $w(x) = \Phi(v(x))$ gilt. Der Einfachheit halber nehmen wir dann sogar $\hat{\Gamma}_v \subseteq \hat{\Gamma}_w$ an, so daß für alle $x \in R$ $v(x) = w(x)$ gilt.

Lemma: Sind $R \subseteq S$ zwei Integritätsbereiche sowie K und L deren zugehörige Quotientenkörper, so gibt es zu jeder Bewertung v von K mit $v(R) = \hat{\Gamma}_v$ eine Fortsetzung w von v auf L mit $w(S) = \hat{\Gamma}_w$.

Beweis: (1) L sei eine algebraische Erweiterung von K und $SR^{-1} = \{sr^{-1} | s \in S \wedge r \in R\setminus \{0\}\}$. Weil jedes $a \in SR^{-1} \subseteq L$ algebraisch über $K \subseteq SR^{-1}$ ist, gilt $K(a) = K[a] \subseteq SR^{-1}$. Also ist SR^{-1} ein Körper, und es folgt $SR^{-1} = L$. Aufgrund des Fortsetzungssatzes für Körperbewertungen existiert eine Fortsetzung w von v auf den algebraischen Erweiterungskörper $L = SR^{-1}$. Zu zeigen bleibt $w(S) = \hat{\Gamma}_w$. $w(S) \subseteq \hat{\Gamma}_w$ gilt trivial. Sei also $\gamma \in \hat{\Gamma}_w$ und $s \in S, r \in R\setminus\{0\}$ mit $w(sr^{-1}) = \gamma$. Wegen $w(R) = v(R) = \hat{\Gamma}_v$ gibt es ein $r' \in R$ mit $w(r') = w(r^{-1})$, also ist $sr' \in S$ mit $w(sr') = \gamma$.

(2) Sei L eine beliebige Erweiterung von K. Es existiert eine algebraisch unabhängige Teilmenge M von S, so daß L eine algebraische Erweiterung von $K(M)$ bzw. S eine algebraische Erweiterung von $R[M]$ ist. Mit T bezeichnen wir die Menge aller Monome $m_1^{n_1} \ldots m_k^{n_k}$ mit $m_1, \ldots, m_k \in M$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jedes $x \in R[M]$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = r_1 t_1 + \ldots + r_l t_l$$

mit $r_1, \ldots, r_l \in R$ und paarweise verschiedenen $t_i \in T$.

Bekanntlich ist dann

$$u: R[M] \longrightarrow \hat{\Gamma}_v$$
$$u: r_1 t_1 + \ldots + r_l t_l \longmapsto \max\{v(r_1), \ldots, v(r_l)\}$$

eine Bewertung von $R[M]$ (Gaußbewertung).

Wegen $N_v = \{0\}$ folgt sofort $N_u = \{0\}$. Für die eindeutige Fortsetzung u' von u auf den Quotientenkörper $K(M)$ von $R[M]$ gilt $\hat{\Gamma}_{u'} = \hat{\Gamma}_u$, also $u'(R[M]) = \hat{\Gamma}_{u'}$. Weil L eine algebraische Erweiterung von $K(M)$ ist, existiert wegen (1) und $R[M] \subseteq S$ eine Fortsetzung w von u' auf L mit $w(S) = \hat{\Gamma}_w$. w ist damit eine Fortsetzung von v auf L mit der gewünschten Eigenschaft.

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas zeigt man den folgenden

Hilfssatz: Es sei R ein Teilring von S und P ein Primideal von R. Gibt es ein Ideal I von S mit $R \cap I \subseteq P$, so existiert ein Primideal Q von S mit $I \subseteq Q$ und $R \cap Q \subseteq P$.

Satz 1: Es sei v eine Bewertung und S eine Erweiterung von R. Zu jedem Primideal P von S mit $P \cap R = N_v$ gibt es eine Fortsetzung w von v auf S mit $N_w = P$.

Beweis: Sei $\bar{v}$ die durch v auf $\bar{R} = R/N_v$ induzierte Bewertung, $\bar{S} = S/P$ und $\tilde{R}$ bzw. $\tilde{S}$ der Quotientenkörper von $\bar{R}$ bzw. $\bar{S}$. Die Fortsetzung von $\bar{v}$ auf $\tilde{R}$ bezeichnen wir mit $\tilde{v}$. Es gilt $\tilde{v}(\bar{R}) = \hat{\Gamma}_{\bar{v}} = \hat{\Gamma}_{\tilde{v}}$. Wegen des Lemmas existiert eine Fortsetzung $\tilde{w}$ von $\tilde{v}$ auf $\tilde{S}$ mit $\tilde{w}(\bar{S}) = \hat{\Gamma}_{\tilde{w}}$. Folglich ist die Restriktion $\bar{w}$ von $\tilde{w}$ auf $\bar{S}$ eine Bewertung von $\bar{S}$, die $\bar{v}$ fortsetzt und für die $N_{\bar{w}} = \{0\}$ gilt. $\bar{w}$ induziert damit auf S eine Bewertung w, die v mit der gewünschten Eigenschaft fortsetzt.

Korollar 1 (Manis): Eine Bewertung v von R ist genau dann auf den Oberring S fortsetzbar, wenn

$SN_v \cap R = N_v$ gilt.

Beweis: Ist w eine Fortsetzung von v auf S, so gilt

$$N_v = R \cap N_v \subseteq R \cap SN_v \subseteq R \cap SN_w = R \cap N_w = N_v.$$

Ist andererseits $SN_v \cap R = N_v$, so existiert nach dem Hilfssatz ein Primideal Q von S mit $SN_v \subseteq Q$ und $Q \cap R \subseteq N_v$ bzw. $N_v \subseteq SN_v \cap R \subseteq Q \cap R \subseteq N_v$. Wegen Satz 1 folgt die Behauptung.

Korollar 2: Es sei v eine Bewertung von R. Ist N_v ein minimales Primideal von R, so ist v auf jeden Oberring S von R fortsetzbar.

Beweis: Da $\{0\}$ ein Ideal von S mit $\{0\} \cap R \subseteq N_v$ ist, gibt es wegen des Hilfssatzes ein Primideal Q von S mit $Q \cap R \subseteq N_v$. Aufgrund der Minimalität von N_v folgt $Q \cap R = N_v$, und wegen Satz 1 gilt die Behauptung.

Abschließend zeigen wir, daß in dem Fall, in dem sich eine Bewertung v von R auf den Oberring S nicht fortsetzen läßt, sich zumindest eine Bewertung w von S konstruieren läßt, die mit v auf $R \setminus N_v$ übereinstimmt.

Satz 2: Es sei v eine Bewertung und S eine Erweiterung von R. Dann existiert eine Bewertung w von S, so daß für alle $x \in R \setminus N_v$ gilt: $w(x) = v(x)$.

Beweis: Ist v auf S fortsetzbar, so betrachte eine solche Fortsetzung w. Sei also v nicht auf S fortsetzbar. Nach (1) existiert eine Bewertung u von S mit $R \subsetneq B_u$ und $P_u \cap R = N_v$. Aufgrund von Satz 1 gibt es eine Fortsetzung v' von v auf B_u mit $N_{v'} = P_u$. u ist nicht trivial, d.h. $B_u \neq S$. Mit (2) kann man sich leicht davon überzeugen, daß es eine Bewertung w von S gibt, für die $B_w = B_{v'}$, $P_w = P_{v'}$ und $P_u \subseteq P_w$ gilt. Es ist sogar $N_w \subseteq P_u$, denn anderenfalls gäbe es ein $x \in S$ mit $w(x) = 0$ und $u(x) \neq 0$. Da u nicht trivial ist, könnte man $u(x) > 1$ annehmen, im Widerspruch zu $x \in B_w = B_{v'} \subseteq B_u$. Also ist P_u ein Primideal von B_w mit $N_w \subseteq P_u \subseteq P_w$. Wegen $B_u = \{x \mid x \in S \wedge xP_u \subseteq P_u\}$ ist nach (3)

$$\begin{aligned} w'\colon B_u &\longrightarrow \begin{cases} w(x) & \text{falls } x \in B_u \setminus P_u \\ 0 & \phantom{\text{falls }} x \in P_u \end{cases} \\ x &\longmapsto \quad \hat{\sum} \end{aligned}$$

eine Bewertung von B_u, wobei $\sum = \{w(x) \mid x \in B_u \setminus P_u\}$ gilt. $B_{w'} = B_w = B_{v'}$ und $P_{w'} = P_w = P_{v'}$. Also ist $v' = w'$ und damit die Behauptung gezeigt.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 2 erhält man das folgende

Korollar: Ist v eine Bewertung und S eine Erweiterung von R, so gibt es eine Bewertung w von S mit Rang $w \geqq$ Rang v.

Literatur

[1] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. Reine Angew. Math. 167 (1932), 160–196.
[2] Manis, M.E.: Extension of valuation theory. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 735–736.
[3] Manis, M.E.: Valuations on a commutative ring. Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 193–198.